Naturaleza y Tecnología
Septiembre-Diciembre 2021
ISSN 2007-672X
Universidad de Guanajuato

Apuntes de Cálculo Vectorial: La integral Línea

Héctor Ismael Olmos Castillo, Departamento de Ingeniería Química, Universidad de Guanajuato, campus Guanajuato, Unidad Noria Alta. Col. Noria Alta S/N. Guanajuato, Gto.

Resumen

Este artículo tiene el objetivo de mostrar un importante tópico en matemáticas, hay un tipo de integrales que dependen de la trayectoria y otras no. Este es un importante tema pues por ejemplo en aplicaciones termodinámicas la forma como se realiza algún trabajo eficiente y óptimo en cuanto a pérdidas depende de la trayectoria. Aquí se muestran casos de estudio que clarifican cuales integrales línea son trayectoria dependientes.

Abstract

This paper has the objective to show an important topic in mathematics, how some integrals are dependent of the trajectory and other ones not. This is an important issue for example in thermodynamics applications, where energy savings is an important objective to goal. Some case studies are showed here.

Introducción

Es perfectamente conocido que si una función matemática que depende de tres variables; el diferencial de esa función se expresa como:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial z}dz$$

Ahora si fuera el caso de que $H = h_1(x) + h_2(y) + h_3(z)$

$$dH = \frac{\partial h_1}{\partial x}dx + \frac{\partial h_2}{\partial y}dy + \frac{\partial h_3}{\partial z}dz$$

Los valores de H no son más que la suma de las integrales.

$$H = \int \frac{\partial h_1}{\partial x}dx + \int \frac{\partial h_2}{\partial y}dy + \int \frac{\partial h_3}{\partial z}dz$$

Es el caso más simple con el que sólo sumar las integrales nos lleva a la función matemática; sin embargo no para todos los casos es así; aunque el diferencial de H sea una función conocida, no llegaremos a ella con la simple suma de evaluación de las integrales.

Considere el caso de que $H = h_1(x, y) + h_2(z) = xy + z$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial z}dz = ydx + xdy + dz$$

Donde $H \neq \int ydx + \int xdy + \int dz = xy + xy + z + c$

Note que con la suma de las integrales no llegamos a la función original, porque xy es el resultado común de la evaluación de la integral $\int ydx$ y la integral $\int xdy$; sólo que en cada una de esas integrales se consideró a y constante ó a x constante. xy es una función común en ambas integrales, de tal manera que esa función común al diferencial forma los dos términos integrables $ydx + xdy$. Al tomar sólo una vez la función común llegamos a la función matemática original.

$$H = xy + z$$

Ahora bien; desde el punto de vista de cálculo vectorial, la función H es un campo escalar. Su gradiente es un campo vectorial. El gradiente de H se expresa como

$$\nabla H = \frac{\partial H}{\partial x}i + \frac{\partial H}{\partial y}j + \frac{\partial H}{\partial z}k$$

Por lo que el diferencial de H es el resultado del producto punto entre el elemento lineal y el gradiente de H

$$dH = \nabla H \cdot ds = \left\{\frac{\partial H}{\partial x}i + \frac{\partial H}{\partial y}j + \frac{\partial H}{\partial z}k\right\} \cdot [dxi + dyj + dzk] = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial z}dz$$

Una integral línea se define como el producto punto de un campo vectorial y el elemento de desplazamiento ds.

$$W = \int F \cdot ds$$

Cuando el campo vectorial F no es el gradiente de un campo escalar; la integral depende de la trayectoria. (James 2017)

Caracterización del campo vectorial

La caracterización del campo vectorial (Verificar F si es el gradiente de un campo escalar), es posible realizarlo con los conocimientos de cálculo elemental. Si F tiene solo términos i, j; entonces si H depende sólo de x e y.

$$dH = F_1 dx + F_2 dy = ¿\frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy?$$

Si $F_1 = \frac{\partial H}{\partial x}\ y\ F_2 = \frac{\partial H}{\partial y}$ entonces debería cumplirse que $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$;

ya que implica que $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$

El no cumplirse esta igualdad representa que la ecuación diferencial no es exacta (Kreyszig 2003), (Zill 2009) y la integral dependerá de la trayectoria.

Cuando son tres las variables independientes x,y,z se usa el rotacional como prueba de exactitud de la ecuación, si el rotacional es cero implica que la integral es independiente de la trayectoria, en caso contrario depende de la trayectoria.

$$rot(G) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)$$

Sólo note que si el componente k no existe, el rotacional se reduce a ser $k\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)$; que es la prueba de exactitud de una ecuación diferencial mencionada líneas antes.

Casos de estudio

Las demostraciones de que integrales dependen o no de la trayectoria, requerirá de tener dos integrales línea una exacta y otra no, donde las condiciones iniciales y finales coincidan. 1166204

Caso 1

Considere el siguiente campo escalar.

$$H = xy$$

$$dH = ydx + xdy$$

Se llegará al campo escalar de origen evaluando la integral línea.

$$H = \int dH = \int F \cdot ds = \int [yi + xj] \cdot [dxi + dyj]$$

De acuerdo con lo discutido líneas arriba esta integral es independiente de la trayectoria para lo cual considérense las siguientes trayectorias para evaluación de la integral línea.

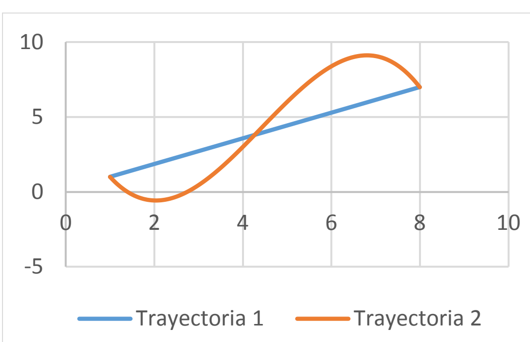

Figura 1: Trayectorias en las cuales se evalúa la integral línea.

Trayectoria 1: La ecuación de la recta que pasa por (1,1) y (8,7)

$$y = \frac{6}{7}x + \frac{1}{7}$$

Expresado como campo vectorial

$$V_{recta} = xi + \left(\frac{6}{7}x + \frac{1}{7}\right)j$$

Trayectoria 2: La ecuación de un polinomio cúbico que pasa por (1,1) y (8,7), y también por puntos intermedios del segmento lineal.

$$\boldsymbol{y = -0.1786x^3 + 2.369x^2 - 7.4286x + 6.2381}$$

Expresado como campo vectorial

$$V_{cúbica} = xi + (-0.1786x^3 + 2.369x^2 - 7.4286x + 6.2381)j$$

Para el caso de la **trayectoria 1**

$$\int_{(1,1)}^{(8,7)} [yi + xj] \cdot [dxi + dyj] = \int_1^8 \left[\left(\frac{6}{7}x + \frac{1}{7}\right) i + xj\right] \cdot \left[dxi + \frac{6}{7}dxj\right] =$$

$$\left[\frac{6}{14}x^2 + \frac{1}{7}x + \frac{6}{14}x^2\right]_1^8 = 55$$

Para la trayectoria 2

$$y = -0.1786x^3 + 2.369x^2 - 7.4286x + 6.2381$$

$$dy = \{-3(0.1786)x^2 + 2(2.369)x - 7.4286\}dx$$

$$\int_{(1,1)}^{(8,7)} [yi + xj] \cdot [dxi + dyj]$$

$$= \int_1^8 (-0.1786x^3 + 2.369x^2 - 7.4286x + 6.2381)dx + x\{-3(0.1786)x^2 + 2(2.369)x - 7.4286\}dx$$

$$= \left\{-0.1786\frac{x^4}{4} + 2.369\frac{x^3}{3} - 7.4286\frac{x^2}{2} + 6.2381x + \left(-3(0.1786)\frac{x^4}{4} + 2(2.369)\frac{x^3}{3} - 7.4286\frac{x^2}{2}\right)\right\}_1^8$$

$$= \{-0.1786x^4 + 2.369x^3 - 7.4286x^2 + 6.2381x\}_1^8 = 55$$

El resultado de la integral línea fue el mismo no importando la trayectoria.

En el caso de la ecuación diferencial exacta $ydx + xdy = 0$; la integral línea es la misma a través de una trayectoria u otra $\int_1^8 \left[\left(\frac{6}{7}x + \frac{1}{7}\right) i + xj\right] \cdot \left[dxi + \frac{6}{7}dxj\right] = \int_1^8 (-0.1786x^3 + 2.369x^2 - 7.4286x + 6.2381)dx + x\{-3(0.1786)x^2 + 2(2.369)x - 7.4286\}dx = \mathbf{55}$.

Ahora considere la evaluación de la integral línea del campo vectorial $V_2 = i + xj$. Con los mismos límites de integración.

$$\int_{(1,1)}^{(8,7)} [i + xj] \cdot [dxi + dyj] = \int_{(1,1)}^{(8,7)} [dx + xdy]$$

Naturaleza y Tecnología
Septiembre-Diciembre 2021
ISSN 2007-672X
Universidad de Guanajuato

De acuerdo con lo discutido líneas arriba

$$\frac{\partial \mathbf{1}}{\partial \boldsymbol{y}} = \mathbf{0}; \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \mathbf{1}; \boldsymbol{La\ ecuación\ diferencial\ dx + xdy = 0\ no\ es\ exacta}$$

Por lo tanto $\int_{(\mathbf{1,1})}^{(\mathbf{8,7})} [\boldsymbol{dx + xdy}]\ \boldsymbol{depende\ de\ la\ trayectoria}.$

Comprobemos esto evaluando por la **trayectoria 1**

$$\int_{(1,1)}^{(8,7)} [i + xj] \cdot [dxi + dyj] = \int_{1}^{8} [i + xj] \cdot \left[dxi + \frac{6}{7} dxj\right] =$$

$$\left[x + \frac{6}{14} x^2\right]_1^8 = \mathbf{34}$$

Comparando el resultado por la **trayectoria 2**

$$\int_{(1,1)}^{(8,7)} [i + xj] \cdot [dxi + dyj] = \int_{1}^{8} dx + x\{-3(0.1786)x^2 + 2(2.369)x - 7.4286\}dx$$

$$= \left\{x + \left(-3(0.1786)\frac{x^4}{4} + 2(2.369)\frac{x^3}{3} - 7.4286\frac{x^2}{2}\right)\right\}_1^8 = \mathbf{31.51}$$

El resultado es diferente, se comprueba que esta integral depende de la trayectoria.

Caso 2

Verificar si la Integral línea depende o es independiente de la trayectoria para el siguiente campo vectorial.

$$F = 5xi + xyj + x^2zk$$

El camino de integración

$$\boldsymbol{r(t) = ti + tj + tk\ \ 0 \leq t \leq 1}$$

Paso 1:

Verificar si el rotacional de F es igual a 0

$$rot(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = 0i - 2xzj + yk$$

El ser diferente de cero significa que la integral línea depende de la trayectoria;

De acuerdo con r(t); x=t;y=t; z=t donde t está entre cero y uno. Esto implica que $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1;$

$$\int F(r)\cdot dr = \int_0^1 F(r)\cdot \frac{dr}{dt}dt$$

$$F(r) = 5xi + xyj + x^2zk = 5ti + t^2j + t^3k$$

$$\frac{dr}{dt} = i + j + k$$

$$\int_0^1 F(r)\cdot \frac{dr}{dt}dt = \int_0^1 (5t + t^2 + t^3)dt = \left[\frac{5}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 3.18$$

Si se propone una segunda trayectoria; ésta trayectoria debe ser acorde a los puntos iniciales y finales de la trayectoria preliminar. $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1; 0 \le z \le 1;$

La trayectoria propuesta

$$r(t) = ti + tj + t^2k; \frac{dr}{dt} = i + j + 2tk$$

$x = t; y = t; z = t^2; 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1; 0 \le z \le 1;$

Sí es acorde a los valores de límites de la trayectoria original (Ambas trayectorias confluyen en sus variables en los mismos puntos iniciales y finales).

$$F(r) = 5xi + xyj + x^2zk = 5ti + t^2j + t^4k$$

$$\int_0^1 F(r)\cdot \frac{dr}{dt}dt = \int_0^1 (5ti + t^2j + t^4k)\cdot(i + j + 2tk)dt$$

$$\int_0^1 (5t + t^2 + 2t^5)\,dt = \left[\frac{5}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{6}t^6\right]_0^1 = \frac{5}{2} + \frac{2}{3} = 3.1$$

Los valores de la integral línea por una u otra trayectoria son diferentes, dependen de la trayectoria.

Un campo vectorial que tiene un rotacional cero es $F = xi + yj + zk$, la integral línea debe de ser independiente de la trayectoria.

Trayectoria 1

$$\boldsymbol{r_1(t) = ti + tj + tk \;\; 0 \le t \le 1}$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 (ti + tj + tk)\cdot(dti + dtj + dtk) = \frac{3}{2}t^2\Big]_0^1 = \frac{3}{2}}$$

Trayectoria 2

$$r_2(t) = ti + tj + t^2k;\; 0 \le t \le 1$$

$$\int_0^1 (ti + tj + t^2k) \cdot (dti + dtj + 2tdtk) = t^2 + \frac{2}{4}t^4\Big]_0^1 = \frac{3}{2}$$

Se confirma la existencia de independencia de trayectoria en campos vectoriales con rotacional cero.

Caso 3

$$F = y^2i - x^2j; Recta\ entre\ (0,0)y\ (1,2)$$

$$\frac{2}{1} = \frac{y-0}{x-0}; y = 2x$$

$$r(t) = ti + 2tj;\ \frac{dr}{dt} = i + 2j$$

$$\int_0^1 F(r) \cdot \frac{dr}{dt}dt = \int_0^1 ((2t)^2i - t^2j) \cdot (i + 2j)dt$$

$$\int_0^1 (4t^2 - 2t^2)\,dt = \frac{2}{3}t^3]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Caso 4

$F = 3x^4i + 3y^6j;$

Trayectoria desde (-2,0) hasta (2,0) a través de $x^2 + y^2 = 4;$ en sentido inverso a las manecillas del reloj

$$r(t) = ti + \sqrt{4 - t^2}j$$

$$r(t) = 2\cos(t)\,i + 2sen(t)j$$

$$\frac{dr}{dt} = -2sen(t)i + 2\cos(t)\,j$$

$$F = 3x^4i + 3y^6j = 3(2\cos(t))^4i + 2(2\text{sen}(t))^6j$$

$$\int \quad F \cdot \frac{dr}{dt}dt = \int_\pi^{2\pi} (3(2\cos(t))^4i + 2(2\text{sen}(t))^6j) \cdot (-2sen(t)i + 2\cos(t)\,j)dt$$

$$= \int_\pi^{2\pi} (-2sen(t)\cos^4(t) + 8\cos(t)\,sen^5(t))\,dt$$

Haciendo para la parte 1 u=cos(t); du=-sen(t)dt;

$\int \quad -2sen(t)\cos^4(t)dt = \int 2u^4du = \left[\frac{2}{5}sen^5(t)\right]_{\pi}^{3/2\pi} + \left[\frac{2}{5}sen^5(t)\right]_{3/2\pi}^{2\pi}$ =

$$\int \quad 8\cos(t)\,sen^5(t)\,dt = \int \quad 8u^5du = \frac{8}{6}sen^6(t)]_{\pi}^{\frac{3}{2\pi}} + \frac{8}{6}sen^6(t)]_{3/2\pi}^{2\pi}$$

Caso 5

$$V_3 = 2xyzi + x^2zj + x^2yk$$

$$rot(V_3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{vmatrix} = i(x^2 - x^2) + j(2xy.-2xy) + k(2xz - 2xz) = 0$$

A través de la trayectoria a) r(t)=ti+2tj-tk ; (0<t<1); $\frac{dr}{dt} = i + 2j - k;\ V_3(r) = -4t^3i - t^3j + 2t^3k;$

$\int \quad V_3 \cdot \frac{dr}{dt}dt = \int_0^1(-4t^3i - t^3j + 2t^3k)\cdot(i + 2j - k)dt = \int \quad (-4t^3 - 2t^3 - 2t^3)\,dt =$
$-\frac{8}{4}t^3]_0^1 = -\frac{8}{4}$=-2

b) r(t)=t^2i+2tj-tk; (0<t<1)

$$V_3 = 2t^2(2t)(-t)i + t^4(-t)j + t^4(2t)k = -4t^4i - t^5j + 2t^4k$$

$$\frac{dr}{dt} = 2ti + 2j - k;$$

$$\int \quad V_3 \cdot \frac{dr}{dt}dt = \int_0^1(-4t^4i - t^5j + 2t^4k)\cdot(2ti + 2j - k)dt = \int_0^1(-8t^5 - 2t^5 - 2t^4)dt = -2$$

El rotacional igual a cero indicaba la integral era independiente de la trayectoria, así lo fue; la integral a través de la trayectoria a) es igual a la integral a través de la trayectoria b).

Referencias

James, Stewart. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas.* Editado por Cengage Learning Editores SA de CV. Available from:: VitalSource Bookshelf, (8th Edition), 2017.

Kreyszig. *Matemáticas superiores para Ingeniería.* Vol. 1. México D.F.: Limuas Wiley, 2003.

Zill, James. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* México, DF: Cengage Learning Editores SA de CV,, 2009.